

ERICH CH. WITTMANN

Über das „rechnende Zählen“ zum „denkenden Rechnen“

Der nicht immer und für alle Kinder leichte Weg zum „denkenden Rechnen“
kann mit spielerischen Übungen von Anfang an unterstützt werden.

Bei der Erforschung der Schwierigkeiten, die manche Kinder beim Rechnen haben, und der Entwicklung von Hilfen für diese Kinder hat die Zahl der Beiträge aus der Mathematikdidaktik in den letzten Jahrzehnten deutlich zugenommen. Den Grund dafür hat Jens H. Lorenz klar beschrieben (1991, S. 192): „Die aktuellen (mathematikdidaktischen) Forschungsansätze sehen in rechenschwachen Schülern keine Gruppe, die sich in ihrem Lernverhalten qualitativ von ihren Klassenkameraden unterscheidet ... Es wird ... absehbar keine Diskussion um eine isolierte Rechenschwäche geben. Es wird dagegen durchaus auf das Lernen und Lehren von Mathematik bezogene Theoriestücke geben, die in besonderem Maße die, wie auch immer definierten, rechenschwachen Schüler betreffen. Aber nicht nur sie.“

Während die mathematikdidaktischen Ansätze zunächst noch stark psychologisch fundiert waren und es zum Teil auch noch heute sind, haben in den letzten Jahren Beiträge an Gewicht gewonnen, die stärker mathematische Aspekte des Rechnens einbeziehen. Michael Gaidoschik hat den Ertrag aus dieser Forschung in sechs „didaktisch-methodischen Empfehlungen“ zur Förderung des „denkenden Rechnens“ zusammengefasst (2010, Kapitel 4):

1. Zahlen als Zusammensetzungen von Zahlen darstellen,
2. Strategien zur Ableitung von schwierigeren Aufgaben aus einfacheren erarbeiten,
3. und sie bewusst machen, den Zahlenraum bis 20 „ganzheitlich“ behandeln,
4. das „Teilschrittverfahren“ zum Zehnerübergang als eine unter anderen Methoden einführen,
5. operativ strukturierte Übungen betonen.

Der vorliegende Beitrag verfolgt vor diesem Hintergrund ein doppeltes Ziel: Im ersten Teil soll gezeigt werden, dass diese Empfehlungen, die in fortschrittlichen Unterrichtswerken bereits umgesetzt sind, nicht besonderen didaktischen Überlegungen entspringen, sondern sich direkt aus der mathematischen Natur des Rechnens ergeben. Im zweiten Teil soll ein neues Lernmaterial vorgestellt werden, mit dem gezielt in diese Richtung gearbeitet werden kann.

Operative Begründung der Rechengesetze

Es war eine besondere Leistung der Mathematiker der vergangenen Jahrhunderte, die Grundlagen, auf denen die

Arithmetik beruht, in wenigen Gesetzen zusammenzufassen. Für den Anfangsunterricht reichen zwei Gesetze für die Addition aus:

- Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz): $a + b = b + a$;
- Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz): $a + (b + c) = (a + b) + c$ (a, b und c sind darin Variablen für beliebige natürliche Zahlen).

In dieser formalen Fassung sind diese Gesetze erst in der Sekundarstufe relevant. Sie beherrschen aber schon das Rechnen auf der untersten Stufe, wenn man sie von ihrer formalen Fassung löst und „operativ“ deutet, wie es Arnold Fricke im Anschluss an die genetische Psychologie und Epistemologie von J. Piaget getan hat (1967). **„Operativ“ heißt, dass man die in diesen Gesetzen verborgenen Handlungen zur Geltung bringt, indem man sich auf geeignete Zahldarstellungen bezieht, an denen man wie mit realen Objekten operieren kann.** Im Anfangsunterricht benutzt man heute allgemein „homogene Materialien“, in der einfachsten Form Plättchen. Dieses Material ist keineswegs eine Erfindung von Didaktikern. Tatsächlich haben bereits die ersten Mathematiker, die sich systematisch mit der Arithmetik befasst haben, Pythagoras und seine Anhänger, „homogenes Mate-

rial“ in Form kleiner Steine (lat. „calculi“) benutzt. Diese Periode der griechischen Mathematik ist als „Steinchen-Arithmetik“ bestens dokumentiert (Becker 1954, S. 34 – 37).

Von diesem operativen Standpunkt aus besagen die beiden Gesetze, dass man eine Menge von Plättchen, deren Anzahl zu bestimmen ist, beliebig in Teilmengen zerlegen, diese umordnen und deren Anzahlen in beliebiger Reihenfolge aufsummieren darf. Bereits in der sog. „ganzheitlichen Rechendidaktik“ von Johannes Wittmann, Horst Karaschewski oder Fritz Bärmann spielte das Umstrukturieren von Plättchen- und Kringelmen eine fundamentale Rolle, wobei allerdings noch auf die Gestaltpsychologie Bezug genommen wurde.

Anwendung der Rechengesetze auf das Rechnen

Die Anwendung des Vertauschungsgesetzes ist einfach. Mehr Aufmerksamkeit erfordert das Assoziativgesetz, da es mindestens drei verschiedene Interpretationen erlaubt:

1. Eine Summe kann schrittweise berechnet werden, indem man den zweiten Summanden zerlegt und zuerst den ersten, dann den zweiten Teilsummanden addiert. Das ist die übliche Anwendung des Gesetzes:
Beispiel: $7 + 5 = 7 + (3 + 2) = (7 + 3) + 2 = 10 + 2 = 12$.
2. Wenn ein Summand um einen bestimmten Wert erhöht wird, erhöht sich die Summe um diesen Wert:
Beispiel: $7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) + 1 = 14 + 1 = 15$.
3. Wenn ein Summand auf Kosten eines anderen erhöht wird, bleibt die Summe gleich:
Beispiel: $10 = 5 + 5 = 5 + (2 + 3) = (5 + 2) + 3 = 7 + 3 = 10$.

Die genaue Analyse dieser Beispiele zeigt, dass einfache Zerlegungen von Zahlen in kleinere Zahlen bzw. einfache Zusammensetzungen kleinerer Zahlen zu

größeren Zahlen die Grundlage für die Ableitung von Ergebnissen schwieriger Aufgaben aus leichteren bilden. Dies gilt nicht nur für das Rechnen in kleinen Zahlräumen, denn das Wesen des Zehnersystems besteht ja darin, dass, wie es die Alten ausdrückten, mit den Zehnern, Hundertern, Tausendern usw. gerechnet wird wie mit Einern.

In der Vergangenheit wurde diese Art zu rechnen – das „denkende Rechnen“ – mehr oder weniger als Privileg „guter Rechner“ betrachtet. „Schwachen Rechnern“ glaubte man am besten mit fest vorgegebenen Verfahren helfen zu können. Hier gilt es umzudenken: **Auch und gerade Kinder, die sich mit dem Rechnen schwerer tun, fahren mit den Werkzeugen, die in der Natur der Mathematik liegen, am besten.** Diese Werkzeuge sind auch für sie auf Dauer die effektivsten, selbst wenn es ihnen am Anfang noch schwerfällt, sie zu handhaben. Einfache Zerlegungen und Zusammensetzungen wollen gelernt sein. Manche Kinder müssen wirklich Hürden überwinden, dafür muss man ihnen Zeit geben.

„Rechnendes Zählen“

Als größtes Hemmnis auf dem Weg zum „denkenden Rechnen“ gilt, wie seit langem bekannt, das Verharren im „zählenden Rechnen“. Man darf nicht übersehen, dass diese Methode ebenfalls auf dem Verbindungsgesetz beruht, also keineswegs unmathematisch ist: Der zweite Summand wird nämlich in lauter Einermengen zerlegt und das Verbindungsgesetz entsprechend oft angewandt (Beispiel: $7 + 5 = 7 + (1 + 4) = (7 + 1) + 4 = 8 + 4 = 8 + (1 + 3) = (8 + 1) + 3 = 9 + 3 = 9 + (1 + 2) = (9 + 1) + 2 = 10 + 2 = 10 + (1 + 1) = (10 + 1) + 1 = 11 + 1 = 12$).

Beim „zählenden Rechnen“ sind nur Additionen + 1 nötig, für die man nur weiterzählen muss. Diese Minimalmethode, mit der man bei konsequenter Anwendung richtige Ergebnisse erhält, ist natürlich nur bei kleinen Zahlen brauchbar. **Um beim Rechnen mit größeren Zahlen**

nicht auf das Weiterzählen beschränkt zu bleiben, müssen die Kinder andere einfache Rechnungen lernen, um diese im Weiteren als Stützpunkte nutzen zu können.

Als sinnvollster Weg hierfür hat sich die Anleitung zum „strukturierten Zählen“ erwiesen: Man muss den Kindern zeigen, dass man z. B. die Punkte der Würfelvier nicht nur in der Weise abzählen kann, dass man Punkt für Punkt abzählt („eins – zwei – drei – vier“) und dabei jeden Punkt wirklich oder im Kopf antippt, sondern dass man die Punkte auch in zwei Paare zerlegen und diese kleinen Anzahlen zusammenrechnen kann: „Links 2, rechts 2, zusammen 4“.

Die Zerlegung kleiner Mengen in Teilmengen, deren Anzahl man auf einen Blick erfassen kann, ist die für das „denkende Rechnen“ entscheidende Fähigkeit. Man kann ohne Übertreibung sagen, dass das Strukturieren wichtiger ist als die Bestimmung von Anzahlen, die zunächst zurückgestellt werden kann. Erst im Weiteren müssen die Kinder lernen, die Anzahl der Elemente einer kleinen Menge aus den Anzahlen der Teilmengen, aus denen sie sich zusammensetzt, durch Addition zu ermitteln. Um deutlich zu machen, dass man bei dieser Form der Anzahlbestimmung bereits rechnen muss, wird hierfür der Terminus „rechnendes Zählen“ vorgeschlagen, den auch Kinder verstehen und nutzen können.

Es ist außerordentlich wichtig, die Nutzung des rechnenden Zählens bereits bei kleinen Anzahlen anzuregen, wo es eigentlich noch nicht nötig ist. Wenn dies nicht geschieht, besteht die Gefahr, dass sich einzelne Kinder so stark an das stückweise Abzählen gewöhnen, dass sie ins „zählende Rechnen“ als exklusive Methode verfallen. Das längere Verharren im Zahlenraum bis 6, wie es bei der gestuften Einführung des Zwanzigerraums im 1. Schuljahr Jahrhunderte lang praktiziert wurde und gerade für die schwächeren Kinder auch heute noch von einzelnen Lehrpersonen als notwendig und hilfreich angesehen wird, ist daher in höchst-

tem Maße kontraproduktiv. Es behindert die Entwicklung der Kinder auf dem Weg zu mathematisch effektiven Rechenwegen.

Das Lernmaterial „Insektenkarten“

Die mathematische Fundierung ist ein Grundprinzip des Projekts „mathe 2000“. Daher wurde in diesem Projekt der Förderung des rechnenden Zählens besondere Bedeutung beigemessen. Zur Unterstützung bereits vorhandener Materialien wurde ein neues Material entwickelt, das genau auf die Förderung dieser Fähigkeit abzielt: die „Insektenkarten“.

In der Version für die Frühförderung handelt es sich um 24 Spielkarten, die einfache Zerlegungen der Zahlen von 1 bis 6 in kleinere Zahlen durch die unterschiedliche Anordnung von Insekten verkörpern (Wittmann/Müller 2010). Für jede Insektenart (Ameisen, Bienen, Käfer und Schmetterlinge) gibt es sechs Karten, auf denen 1 bis 6 Insekten in unterschiedlicher Strukturierung abgebildet sind. Für die 6 zeigen die Karten mit den Bienen und den Käfern die Zerlegung $3 + 3$, die Karte mit den 6 Ameisen zeigt die Zerlegung $4 + 2$, und die Karte mit 6 Schmetterlingen die Zerlegung $3 + 2 + 1$.

Mit diesen Karten sind verschiedene Spiele nach mathematisch begründeten Regeln möglich.

Beispiel 1: „Immer 4 Karten“

Die 24 Karten werden gemischt und gleichmäßig an 3 – 4 Spieler verteilt. Ein Kind beginnt und legt eine seiner Karten in die Mitte. Die Kinder müssen dann reihum jeweils eine Karte mit der gleichen Anzahl dazu legen bzw. aussetzen, wenn sie keine passende Karte haben. Jedes vollständige Quartett wird beiseite gelegt.

Beispiel 2: „Karte an Karte“

Für dieses Spiel benötigt man einen Spielplan, auf dem in Tabellenform $4 \cdot 6$ leere Felder in der Größe der Spielkarten angeordnet sind. Über jeder Spalte zeigt eine Zahl an, welche Anzahlen für diese Spalte vorgesehen sind. Die 24 Tierkarten werden gemischt und gleichmäßig an 3 – 4 Kinder verteilt. Ein Kind beginnt und legt eine Karte passend in ein Feld der richtigen Spalte (z. B. „3 Käfer“ auf das Feld in der dritten Spalte und der zweiten Zeile). Die Kinder legen dann reihum jeweils eine Karte links neben einer schon gelegten Karte oder rechts daneben oder genau darüber oder genau darunter ab. In jeder Spalte dürfen nur Insektenkarten mit der für die Spalte zugelassenen Anzahl liegen, in jeder Zeile nur Karten der gleichen Insektenart. Dies bedeutet, dass eine Karte, die in einer Zeile erstmalig gelegt wird, die Art für diese Zeile festlegt. Das Spiel endet, wenn alle Felder belegt sind.

Erweiterung

Für den Anfangsunterricht wurde das Material erweitert (Wittmann/Müller 2011, s. Abb. 1): Zu jeder Insektenart gibt es zusätzlich noch vier Karten, auf denen 7 – 10 Ameisen, Bienen, Käfer und Schmetterlinge so dargestellt sind, dass die wichtigen Zerlegungen dieser Zahlen zur Geltung kommen. Insgesamt gehören zu dem Spiel dann 40 Karten.

Gespielt wird nach den gleichen Regeln wie bei dem kleinen Kartenset. Wenn die Kinder die Regeln eines Spiels verstanden haben, sollen sie die Spiele alleine mehrfach spielen. Die Lehrperson sollte sich immer wieder zu einer Gruppe dazu setzen, mitspielen und sich so über die Lernfortschritte, insbesondere der schwächeren Kinder, informieren.

Reflexionsphasen

Der Weg zum „rechnenden Zählen“ wird dadurch entscheidend gefördert, dass die Kinder zur Reflexion über Zerlegungen angeregt werden. Dies kann in folgender Form geschehen: Die Lehrperson hält vor sich eine Karte, die von den Kindern nicht einsehbar ist und beschreibt ihre Struktur. Aufgabe der Kinder ist es herauszufinden, welche Anzahl auf der Karte dargestellt ist. Natürlich ist es sinnvoll, bei kleinen Zahlen zu beginnen und je nach Lernfortschritt zu größeren Zahlen überzugehen (Beispiele: „Ich sehe oben zwei Käfer und unten einen. Wie viele sind das zusammen?“ oder „Ich sehe auf der einen Seite fünf Käfer, auf der anderen zwei. Wie viele sind das zusammen?“)

Die Erfahrungen in der Praxis zeigen, dass sich die Kinder im Umgang mit den Insektenkarten erwartungsgemäß nicht nur einfache Zerlegungen fest einprägen, sondern dass sie auch das Zerlegen als sinnvolle Hilfe beim Rechnen verstehen.

Literatur

- Becker, O.: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. Freiburg: Albrecht 1954.
- Fricke, A.: *Operatives Denken im Rechenunterricht als Anwendung der Psychologie von Piaget*. In: Westermanns Pädagogische Beiträge. Braunschweig: Westermann 1959, S. 99 ff.
- Gaidoschik, M.: *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht*. Frankfurt: Lang 2010.
- Lorenz, J. H.: *Rechenschwache Schüler in der Grundschule. Erklärungsversuche und Förderstrategien*. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 12. Heidelberg: Springer 1991, Teil I: S. 3 – 34, Teil II: S. 171 – 198.
- Wittmann, E. Ch./Müller G. N.: *Das Zahlenbuch. Spiele für die Frühförderung*. Stuttgart: Klett 2010.
- Wittmann, E. Ch./Müller G. N.: *Sieben auf einen Blick. Lernspiele zur Förderung des „rechnenden Zählens“*. Stuttgart: Klett 2011.



ERICH CH. WITTMANN
ist Emeritus an der Universität Dortmund und einer der Leiter des Projekts „mathe 2000“.



„Sieben auf einen Blick“

Dieses Material für den Anfangsunterricht setzt die Spiele mit den Insektenkarten aus dem „Zahlenbuch-Frühförderprogramm“ fort. In diesem Programm sind dabei jeweils vier Insektenarten (Ameisen, Bienen, Schmetterlinge, Marienkäfer) als Karten in Anzahlen von 1 bis 6 vorhanden.

Bei „Sieben auf einen Blick“ werden diese Karten um die Anzahlen von 7 bis 10 erweitert. Diese Anzahlen werden strukturiert so dargestellt, dass die Zahlbeziehungen deutlich werden, welche spielerisch erlernt werden können.

Der Spielkarton „Sieben auf einen Blick“ kostet € 14,95 € und ist beim Klett-Verlag unter der ISBN 978-3-12-200939-7 zu bestellen. Er enthält neben den Insektenkarten eine Anleitung und Spielpläne.

