

Das Projekt „mathe 2000“: Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung

Erich Ch. Wittmann

Das Gleiche lässt uns in Ruhe, aber der Widerspruch ist es, der uns produktiv macht.

(J. W. von GOETHE)

Alles, was sich entwickelt hat und entwickelt, kann man am besten verstehen, wenn man seiner Genese folgt. Dieses genetische Prinzip, das der Entwicklung mathematischer Begriffe im Projekt „mathe 2000“ zugrunde liegt, ist auch hilfreich um zu erklären, worin das Projekt selbst besteht. „mathe 2000“ ist bei seiner Gründung keineswegs aus dem Nichts entstanden, sondern baute auf Erfahrungen und Zielvorstellungen auf, die weit zurückreichen. Anlässlich des 25-jährigen Jubiläums erscheint es angebracht, die zugrundeliegenden Motive und Grundsatzentscheidungen offenzulegen und auch die Personen zu benennen, denen entscheidende Anregungen zu verdanken sind. Dies soll in diesem abschließenden Beitrag aus der *persönlichen Sicht* eines Projektmitbegründers erfolgen. Bei dieser Bilanz müssen auch die Widerstände angesprochen werden, die sich aus dem Bemühen um eine fruchtbare Verbindung von Wissenschaft und Praxis ergeben. Diese Problematik betrifft die didaktische Entwicklungsforschung in allen Fächern. Insofern sind die Erfahrungen im Projekt „mathe 2000“ nicht nur auf die Mathematik beschränkt, sondern typisch.

Die Wurzeln des Projekts

In den 1950er-Jahren, in denen Gerhard Müller und ich das Gymnasium besucht haben, war der Mathematikunterricht inhaltlich noch ganz von der klassischen Mathematik geprägt. Unsere Schulbücher enthielten keineswegs nur Routine-Aufgaben, sondern boten auch viele herausfordernde Konstruktions- und Beweisaufgaben, an denen wir unsere geistigen Kräfte schulen konnten. Wir nutzten diese Möglichkeiten, besonders angeregt durch unsere Mathematiklehrer Dieter Heckmann bzw. Andreas Geier. Als wir Anfang der 1960er-Jahre an den Universitäten Heidelberg bzw. Erlangen das Studium der Mathematik und Physik für das Lehramt an Gymnasien aufnahmen, Gerhard Müller zusätzlich auch noch das Studium der Chemie, fühlten wir uns gut vorbereitet. Dazu trug auch der Umstand bei, dass an den Universitäten die moderne Strukturmathematik noch nicht voll Fuß gefasst hatte, die in einer unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki veröffentlichten mathematischen Reihe ihren Ausdruck fand. Als wir im Hauptstudium abstraktere Darstellungen mathematischer Theorien kennenlernten, hatten wir dafür eine gute inhaltliche Grundlage.

Beide machten wir in unserem Studium die Erfahrung, dass die selbstständige Auseinandersetzung mit Aufgaben die beste Methode ist, um einen Stoff zu verstehen. Ich hatte dazu eine prägende Schlüsselerfahrung: Nach einer Vorlesung über Algebra musste ich mich einer mündlichen Prüfung für ein Stipendium unterziehen. Der Dozent stellte mir eine Reihe von Fragen, die ich schnell und präzise beantworten konnte, sodass ich diese Prüfung mühelos bestand. In den nachfolgenden Semesterferien hatte ich Zeit und beschloss zusätzlich zur Nacharbeitung der Vorlesung auch noch das Buch „Algebra I“ von Bartel L. van der Waerden (vgl. 1960) zu studieren, das uns der Dozent empfohlen hatte – ein Schlüsselwerk der modernen Mathematik, wie sich später herausstellte. Ich hatte keine Schwierigkeiten den Text zu lesen. Da mir alles so klar erschien, verzichtete ich darauf, auch die Aufgaben zu lösen, die den einzelnen Kapiteln nachgestellt waren. Da ich das Buch aber sehr schnell durchgelesen hatte, dachte ich, ich könne sozusagen im Vorbeigehen noch die eine oder andere Aufgabe bearbeiten. Zu meinem allergrößten Erstaunen konnte ich aber keine einzige Aufgabe auf Anhieb lösen. Das gab mir sehr zu denken. Mein Prüfungserfolg war offenbar trügerisch. Als ich in mehreren Wochen mit einiger Anstrengung schließlich alle Aufgaben gelöst hatte, war mir bewusst, dass mein Verständnis von Algebra nach der Rezeption einer Vorlesung und eines Textes nur sehr oberflächlich gewesen war.

Wichtig für das Verständnis von Grundprinzipien des Lehrens und Lernens war auch eine ernüchternde Erfahrung in einer Analysisvorlesung eines jungen Mathematikers, der den neuen Bourbaki-Stil verkörperte. Ich hatte die Analysis im traditionellen Stil schon bei einem älteren Mathematiker gehört und wollte mich jetzt mit einer modernen Darstellung vertraut machen. Über weite Strecken konnte ich gut folgen. Völlig neu für mich waren aber alternierende Differentialformen. Sie wurden formal als Abbildung einer geordneten Indexmenge in einen Ring von Funktionen definiert. In diesem Teil der Vorlesung verstand ich buchstäblich nichts und konnte auch keine Übungsaufgaben lösen. Da ich aber unbedingt verstehen wollte, was es mit alternierenden Differentialformen auf sich hat, orientierte ich mich anderweitig. In der „Differential- und Integralrechnung“ von Wilhelm Maak (vgl. 1960, S. 238 ff.) wurden alternierende Differentialformen nicht nur auf der Grundlage mathematischer Kenntnisse erklärt, über die ich verfügte, sondern es wurden auch noch Anwendungen auf Differentialoperatoren der Physik gegeben. Das war eine große Hilfe für das Verständnis der Maxwell'schen Gleichungen in einer späteren Vorlesung über Elektrodynamik.

Aufgrund ähnlicher weiterer Lernerfahrungen verdichtete sich bei mir die Auffassung, dass für erfolgreiches Lernen von Mathematik die aktive Auseinandersetzung mit Problemen in sinnvollen Zusammenhängen von ausschlaggebender Bedeutung ist. Ich hatte am eigenen Leibe erfahren, dass dieser Zugang aber nur möglich ist, wenn die Lernangebote an das Vorwissen anschließen. Meinen späteren Unterricht als Lehrer so zu organisieren, dass keine Brüche entstehen, die notwendig zu Misserfolgen führen, wurde für mich in frühen Jahren zu einer Art didaktischer Mission.

In meiner zweiten Ausbildungsphase am Dientzenhofer-Gymnasium in Bamberg wurde ich in dieser Orientierung von zwei Seiten her weiter bestärkt. Mein hochgeschätzter Mathematik-Fachleiter Otto Schropp wies mich auf das Bändchen „Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Aufgaben“ von Georg Polya (vgl. 1949) hin. Polya, der als einer der kreativsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts gilt, veröffentlichte später weitere Bücher, in denen er die Kunst des Aufgabenlöses (Heuristik) zur Blüte brachte (vgl. POLYA 1963a, 1963b, 1966, 1969). Diese Bücher habe ich verschlungen. Sie zeigten die Mathematik von einer Seite, die im Studium nicht angemessen zur Geltung gekommen war.

Ein merkwürdiger Zufall führte mich bei der Reflexion meiner Unterrichtsversuche auf das Buch eines Psychologen. Schon seit meiner Schulzeit hatte ich mich gefragt, wie es kommt, dass sich manche Schülerinnen und Schüler leichter tun als andere. Die gängige Erklärung war, dass die einen eben „intelligenter“ seien als andere. Von dem Buch „Psychologie der Intelligenz“ eines gewissen Jean Piaget (vgl. 1947) versprach ich mir Aufklärung. Ich habe mich über den Titel eines Buches selten so getäuscht wie über den Titel dieses Buches. Piaget, der heute als einer der großen Psychologen des 20. Jahrhunderts gilt, beschreibt die Intelligenz nicht als eine menschliche Eigenschaft, die „intelligenten“ Menschen im Gegensatz zu anderen zukommt, sondern als Fähigkeit von Organismen ganz allgemein – nicht nur von Menschen – sich an ihre Umwelt aktiv anzupassen und sich in diesem Prozess zu entwickeln. Die Intelligenz als biologisch-psychologische Anpassungsfunktion zu sehen eröffnete mir eine völlig neue Perspektive für das Lehren und Lernen, die sich in glücklichster Weise mit dem aktiven Zugang von Polya zur Mathematik verband. Die Verbindung zur Mathematik ergab sich natürlich auch aus Piagets Forschungen über die Entwicklung des mathematischen Denkens von Kindern (vgl. BETH & PIAGET 1961, PIAGET 1972, PIAGET & INHELDER 1971, PIAGET & SZEMINSKA 1972). Mit Piagets genetischer Psychologie habe ich mich später intensiv beschäftigt. Sie ist einer der Grundpfeiler des Projekts.

Während der Referendarzeit war eine Auseinandersetzung mit der „Neuen Mathematik“ (Mengenlehre), dem Ableger der Strukturmathematik, unvermeidlich. Diese Strömung fand auch in Deutschland zahlreiche Anhänger. Aufgrund unseres inhaltlich geprägten Studiums standen Gerhard Müller und ich der „Mengenlehre“ ablehnend gegenüber. Schon als Studenten hatten wir genau registriert, dass auch innerhalb der Mathematik Kritik an der Strukturmathematik formuliert wurde. Gerhard Müller lernte von einem seiner akademischen Lehrer, „dass es noch lange keine Mathematik ist, wenn einer zweimal ‚hom‘ sagt“ („hom“ wird hier als geringschätziges Kürzel für die neuen Begriffe „Homomorphismus“ und „Homologie“ benutzt). Ein amerikanischer Mathematiker bezeichnete Bourbaki rückblickend als Erfinder der Unterrichtsmethode, bei der man bei allgemeinen Begriffen beginne und solange dabei verweile, bis die Lernenden so verwirrt seien, dass sie auch konkrete Inhalte nicht

mehr verstünden (vgl. SPIVAK 1979, S. 608). Wichtig für meine kritische Auseinandersetzung mit der „Mengenlehre“ war der Artikel „Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?“ von Hans Freudenthal (vgl. 1963). Ich hatte 1966 nach der zweiten Ausbildungsphase und vor Eintritt in das Erlanger Mathematische Institut das Glück Hans Freudenthal, damals Präsident der International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), bei einer Konferenz in Erlangen zu begegnen. Dieses Treffen gab mir den entscheidenden Anstoß für eine intensivere Beschäftigung mit mathematikdidaktischen Fragen. Es bildete auch den Ausgangspunkt für einen kontinuierlichen Kontakt mit diesem universal gebildeten Gelehrten, der die „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ sah, so der Titel eines seiner Hauptwerke (vgl. FREUDENTHAL 1973). Für ihn waren der aktive Zugang zur Mathematik, die „gelenkte Nacherfindung“, wie er sie nannte, und die Stiftung von Sinn, bei der er Bezügen zur Realität entscheidende Bedeutung beimaß, Grundpfeiler seines didaktischen Denkens.

Während meiner Zeit am Erlanger Mathematischen Institut hatte ich auch immer wieder Gelegenheit meinem älteren Bruder und meiner Schwägerin über die Schulter zu schauen, die damals als junge Volksschullehrer ihren Unterricht sehr gründlich vorbereiteten und mich für ihren Mathematikunterricht häufig zu Rate zogen. Für sie gehörten Wilhelm Oehls Bücher „Der Rechenunterricht in der Grundschule“ und „Der Rechenunterricht in der Hauptschule“ zur Standardlektüre (vgl. OEHL 1962, 1967). Natürlich schaute ich mir diese Bücher genauer an und war beeindruckt, welche große Bedeutung darin auf die mathematische Analyse des Stoffes gelegt wurde. Zu meiner größten Überraschung stützte sich Oehl auf die operative Rechendidaktik von Arnold Fricke, der seinerseits auf der psychologischen Didaktik von Hans Aebli, einem Schüler von Piaget, aufbaute. Ich erkannte, welches mathematikdidaktische Potenzial in der Piagetschen Psychologie steckt und wurde dadurch weiter bestärkt, in die Mathematikdidaktik zu wechseln.

Anfang 1969 ergab sich durch Zufall ein Briefkontakt mit Wilhelm Oehl, der kurz vor seiner Emeritierung stand. Er forderte mich auf, mich auf seine Nachfolge zu bewerben. Ich hatte das große Glück, ein halbes Jahr später meine Arbeit an der Pädagogischen Hochschule Ruhr Dortmund als Kollege von Heinrich Winter aufnehmen zu können. Der intensive Austausch mit Heinrich Winter im Institut und mit Wilhelm Oehl bei häufigen privaten Treffen war für mich äußerst lehrreich.

Die Erarbeitung einer methodologischen Basis

Die Mathematikdidaktik befand sich damals weltweit in einer stürmischen Entwicklung. Als IMCI-Präsident organisierte Hans Freudenthal 1969 den ersten Internationalen Kongress über Mathematikunterricht (ICME 1) in Lyon und gründete auch die erste europäische internationale Zeitschrift „Educational Studies in Mathematics“ (ESM). Die Frage, wie die Mathematikdidaktik zu organisieren und wissenschaftstheoretisch einzuordnen sei, war damals noch völlig offen. 1974 wurde im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) eine Reihe von Artikeln zum wissenschaftlichen Status der Didaktik veröffentlicht. Mein Beitrag „Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft“ (vgl. WITTMANN 1974) war ganz wesentlich angeregt durch das Bändchen „The Sciences of the Artificial“ von Herbert A. Simon, der 1978 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhielt (vgl. SIMON 1970). Simon schrieb dieses Werk sozusagen zur Festigung seiner eigenen Position als Wirtschaftswissenschaftler, Informatiker und Verwaltungswissenschaftler. Es ging ihm darum, den wissenschaftlichen Status dieser und anderer angewandter Disziplinen, z. B. der Ingenieurwissenschaften, der Medizin, der Architektur, usw. als „design sciences“ gegenüber den etablierten Disziplinen wie Mathematik, Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften zu definieren. Die Besonderheit der „design sciences“ sah er darin, dass es bei ihnen nicht einfach um die Erforschung von Realitäten geht, die von Natur aus gegeben oder geschichtlich geworden sind, sondern um die Konstruktion und Erforschung „künstlicher Objekte“, die gewissen Zwecken genügen sollen. Solche Artefakte sind z. B. Maschinen, Brücken, medizinische Therapien, Computerprogramme usw. Die durchgehende Verwendung des Terminus „design“ ist sprachlich gewöhnungsbedürftig, beschreibt aber die typische Eigenschaft dieser Disziplinen, bei denen immer etwas mit bestimmten Absichten konstruiert, hergestellt, entwickelt und gebaut und im Einsatz optimiert wird. Die Mathematikdidaktik ließ sich hier in natürlicher Weise als „design

science“ einordnen: Die von ihr konstruierten (entwickelten) Objekte sind Unterrichtsvorlagen unterschiedlichster Art, mit denen das Lehren und Lernen optimiert werden soll.

Eine wesentliche Bestätigung für diese Auffassung von Mathematikdidaktik ergab sich in der Zusammenarbeit mit Gerhard Müller, der 1973 die Nachfolge von Heinrich Winter angetreten hatte. Bei seinem Bewerbungsvortrag hatte er das Nim-Spiel und die dahinter stehende Theorie vorgestellt. Das war der erste von mir bewusst wahrgenommene Prototyp einer mathematisch fundierten „substanziellen Lernumgebung“, wie wir es heute nennen. Wir sprachen damals einfach von „Unterrichtsbeispielen“. Das 1970 aus dem Englischen ins Deutsche übersetzte Buch „Modelle für den Mathematikunterricht in der Grundschule“ (vgl. WHEELER 1970), das mir Heinrich Winter gleich bei Dienstantritt zur Lektüre empfohlen hatte, rückte damit ins volle Licht. Der Titel dieses Buches war nicht besonders glücklich gewählt. Treffender wäre „Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Grundschule“ gewesen. Im Austausch mit Georg Schrage, der 1975 zu uns stieß und uns als hervorragender Elementarmathematiker in die Diskrete Mathematik einführte, entwickelten sich unsere Vorstellungen weiter. In dem 1977 veröffentlichten Buch „Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele“ wurden sie praktisch umgesetzt (vgl. MÜLLER & WITTMANN 1981³). Mehr als die Hälfte dieses Buches bestand aus ausgearbeiteten Unterrichtsbeispielen bzw. Fragmenten von Unterrichtsbeispielen. Von den Fragmenten wurden in den folgenden Jahren viele ausgearbeitet und fanden später mit ausgearbeiteten Beispielen aus dem Buch, darunter dem Nim-Spiel, Eingang in das ZAHLENBUCH. Nicht unerwähnt bleiben darf in diesem Zusammenhang, dass das Nim-Spiel auch später noch einmal eine wichtige personelle Weichenstellung veranlasste: Der junge Student Christoph Selter zog Anfang der 1980er-Jahre mit einer kreativen Inszenierung des Nim-Spiels in einem 2. Schuljahr unsere besondere Aufmerksamkeit auf sich und wurde danach von uns nach Kräften gefördert.

Gerhard Müller war ebenfalls voll überzeugt, dass es beim Lernen von Mathematik entscheidend auf Verständnis ankommt, und hat bei seiner didaktischen Arbeit immer die Verbindung zum „gesunden Menschenverstand“ hergestellt. Christoph Selter und Gerd Walther haben diese Bemühungen in der Festschrift zu seinem 60. Geburtstag gewürdigt (SELTHER & WALTHER 2001, S. 9–18).

Bei unserer intensiven Beschäftigung mit der didaktischen Tradition wurden wir später durch die Dissertation von Siegbert Schmidt (vgl. 1978) mit dem Werk von Johannes Kühnel bekannt gemacht. Nicht nur Kühnells „Neubau des Rechenunterrichts“ von 1916 wirkte auf uns wie ein Fanal in ein neues Zeitalter: „Das Tun des Schülers ist nicht mehr auf Empfangen eingestellt, sondern auf Erarbeiten. Nicht Leitung und Rezeptivität, sondern Organisation und Aktivität ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet.“ Auch Kühnells Vorstellungen von einer didaktischen Entwicklungsforschung regten uns stark an. Diese gute deutsche Tradition fortzusetzen und dabei alles einzubringen, was wir bis dahin gelernt hatten, wurde das explizite Leitmotiv unserer didaktischen Bemühungen.

Wesentliche Impulse erhielten wir auch von der Entwicklungsforschung am „Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs“ (IOWO), das Hans Freudenthal 1971 an der Universität Utrecht gegründet hatte. Der Vortrag, den Edu Wijdefeld 1976 bei Freudenthals Abschied aus dem IOWO über ein Unterrichtsexperiment zum „Zwergendorf“ gehalten hatte, übte auf mich eine ähnliche Wirkung aus wie der Vortrag von Gerhard Müller zum Nim-Spiel. Das war substanzielle Mathematik, zugeschnitten auf die Lernvoraussetzungen der Kinder, praktisch überzeugend in eine Sequenz von Aktivitäten ausgearbeitet, für die Lehreraus- und -fortbildung bestens geeignet.

Anstöße zur Gründung des Projekts

Obwohl wir eine klare Vision von einem mathematisch fundierten aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht hatten und uns auf einer zumindest uns selbst überzeugenden methodologischen Basis bewegten, waren uns für unsere Entwicklungsforschung zunächst die Hände gebunden. Anfang der 1970er-Jahre beherrschte ja die „Mengenlehre“ das Feld und sie war mit unseren Vorstellungen von Mathematik nicht vereinbar. Die Situation änderte sich erst 1985 zu unseren Gunsten, als ein neuer Lehrplan für den Mathematikunterricht der Grundschule in

Nordrhein-Westfalen in Kraft trat, der unter der Federführung von Heinrich Winter erarbeitet worden war. Damit hatten wir endlich den Rahmen, den wir benötigten, um aktiv in die Breite wirken zu können. Mehrere Erfahrungen veranlassten uns, unsere Arbeit 1987 zu einem Projekt mit einem klaren Programm zu bündeln.

Von 1983 bis 1987 hatte ich das Privileg mit Hans Freudenthal, Heinrich Winter, Wolfgang Kroll, Lutz Führer und Jochen Ziegenbalg als Herausgeber der Zeitschrift „mathematik lehren“ zusammenarbeiten zu können. Bei dieser Tätigkeit wurde mir bewusst, dass es über eine Zeitschrift, in der die Themen und Beiträge in bunter Folge wechseln, schlechterdings unmöglich ist, den Mathematikunterricht konzeptionell zu verändern. Da alle zwei Monate ein neues Heft erscheinen muss, steht man als Herausgeber ständig unter Druck. Gründliches Arbeiten ist nicht möglich. Der damalige Geschäftsführer des Verlags, in dem „mathematik lehren“ erschien, machte sich über unsere Anstrengungen, bei jedem Heft auf ein bestimmtes Anspruchsniveau zu achten, sogar lustig. Lehrer würden das gar nicht schätzen, meinte er. Diese Umstände veranlassten mich – wie später auch die anderen Kollegen – aus dem Herausgeberteam auszutreten. Ich beriet mich mit Gerhard Müller und wir kamen zu dem Schluss, dass Zeitschriften, die sich an Lehrerinnen und Lehrer wenden, kein geeignetes Forum für den wissenschaftlich fundierten Neuansatz waren, den wir im Auge hatten.

1979 schied Hans Freudenthal als Herausgeber der „Educational Studies in Mathematics“ (ESM) aus. Auf seinen Vorschlag wurde ich in den neuen wissenschaftlichen Beirat dieser Zeitschrift berufen und übernahm die Aufgabe eines „book review editor“. Es zeigte sich schnell, dass der neue geschäftsführende Herausgeber eine grundsätzlich andere Auffassung von Mathematikdidaktik hatte als ich. Zum offenen Konflikt kam es, als ich 1986 zwei Manuskripte zur Begutachtung einreichte:

- die Übersetzung eines Artikels von Heinrich Winter, der in „mathematik lehren“ unter dem Titel „Schieben, Rechnen, Denken“ erschienen war und eine wunderbare Begründung der Teilbarkeitsregeln mithilfe der Stellentafel enthielt (WINTER 1985);
- die Ausarbeitung eines Vortrags über produktives Üben, den ich bei einer internationalen Tagung in Belgien mit sehr guter Resonanz gehalten hatte und in dem das neue Übungskonzept weiter ausgeführt wurde, das Heinrich Winter in seinem fundamentalen Artikel „Begriff und Bedeutung des Übens“ (vgl. 1984) begründet hatte.

Der geschäftsführende Herausgeber von ESM war der Meinung, diese Manuskripte würden „wissenschaftlichen“ Kriterien nicht genügen und sollten besser in einer Zeitschrift für Lehrer veröffentlicht werden. Ich war damit überhaupt nicht einverstanden und bat die übrigen Mitglieder des Beirats um ihre Meinung. Die meisten von ihnen verhielten sich indifferent. Es gab aber auch Stimmen, die meine Position entschieden unterstützten. Ein Mitglied aus England äußerte sich folgendermaßen:

Ich glaube, dass sich in der letzten Zeit in der Mathematikdidaktik neue Forschungskonventionen herausgebildet haben, die nach meiner Auffassung nur geringe Berechtigung haben. Ich habe das bei internationalen Konferenzen so empfunden, ich sehe es in einigen Zeitschriften, und nehme es auch bei der Begutachtung von Manuskripten wahr, die bei ESM eingereicht wurden. Diese Konventionen beinhalten eine Art unpersönlichen Stil, der für die akademische Kommunikation als besonders geeignet angesehen wird, überbordende Literaturverzeichnisse und ausufernde Diskussionen der existierenden Literatur, sowie das allgemeine Gefühl, dass ein Autor, der sich nicht an die Regeln des Clubs hält, auszuschließen ist. Zu diesen Konventionen gehört auch, dass wissenschaftliche Artikel über Mathematikdidaktik keine mathematischen Beispiele oder Material, das man im Unterricht unmittelbar benutzen könnte, enthalten dürfen. Dies führt zu einer großen Zahl von Artikeln in wissenschaftlichen Zeitschriften, die ich für unlesbar halte.

Ich ziehe Artikel vor, die möglicherweise als eher für Lehrerzeitschriften geeignet angesehen werden können, aber diese Artikel sollten von höchster Qualität sein. Das sicherzustellen ist Aufgabe des wissenschaftlichen Beirats der ESM. Einige Personen, die in der Lehrerbildung tätig sind, haben mir gegenüber die Meinung vertreten, dass in ESM Material veröffentlicht wird, das eine eigene Welt darstelle und von den praktischen Problemen des Mathematikunterrichts zu weit entfernt sei.

Ein Beiratsmitglied aus Österreich gab folgende Einschätzung:

Ich beklage die wachsende Distanz zwischen der Unterrichtspraxis und der „Forschungs-Didaktik“, in der sich eine „Kaste“ von Experten konstituiert hat. Ich habe ein schlechtes Gefühl dabei und viele Lehrerinnen und Lehrer auch. Mehr und mehr Praktiker gewinnen Selbstvertrauen bei der Reflexion über ihren Unterricht, bei der Entwicklung neuer Inhalte und Methoden, aber ich fürchte, der Stil in den Zeitschriften läuft aus dem Ruder.

Ich beriet mich erneut mit Gerhard Müller und unsere Schlussfolgerung aus diesem Konflikt war, dass auch wissenschaftliche Zeitschriften solcher Art kein Forum für die praxisbezogene Entwicklungsforschung waren, die wir uns vorgenommen hatten.

Ebenfalls 1986, also ein Jahr nach Inkrafttreten des Winter-Lehrplans, fand die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) in Bielefeld statt. Am Rande der Tagung unterhielt ich mich mit dem Herausgeber eines weitverbreiteten Unterrichtswerks und fragte ihn, welche Konsequenzen er und sein Team aus dem Lehrplan ziehen würden. Er gab mir zu verstehen, dass kaum Handlungsbedarf bestehe. Ihr Werk sei mit marginalen Veränderungen genehmigt worden. Als ich daran Kritik übte, schaute er mich an und sagte in aller Freundschaft: „Lieber Herr Wittmann, Sie sind ein sehr guter Theoretiker, aber von der Schulbucharbeit haben Sie, mit Verlaub, keine Ahnung.“ Was sollte man darauf antworten? Es war klar, dass bloßes Reden und das Schreiben von Artikeln nicht genügen würde.

Ein Jahr später, Anfang März 1987, richtete die Bergische Universität in Wuppertal die GDM-Jahrestagung aus. Einer der Vorträge befasste sich mit dem Üben im Mathematikunterricht. Er wurde von zwei Schulleitern aus dem Bergischen Land gehalten, die mehrere Bände mit Übungsmaterial vom Typ „bunte Hunde“ und „graue Päckchen“ veröffentlicht hatten. Natürlich mussten wir in der anschließenden Diskussion an diesem Konzept, das im offenkundigen Widerspruch zu dem Winter-Lehrplan stand, Kritik üben. Einer der Vortragenden gab darauf eine kurze und trockene Antwort: „Wenn Sie damit nicht einverstanden sind, können Sie ja etwas anderes machen.“

Diese Aufforderung war dann der allerletzte Anstoß für uns, im Frühjahr 1987 das Projekt „mathe 2000“ zu gründen, in dem wir systematisch an der Entwicklung des Mathematikunterrichts auf der Grundlage des Winter-Lehrplans arbeiten und uns ein eigenes Forum für die Verbreitung der Ergebnisse unserer Entwicklungsforschung schaffen wollten. Das Projekt sollte **wissenschaftlich fundiert und gleichzeitig praxisbezogen** sein, wie es unserer Auffassung von der Mathematikdidaktik als einer „design science“ entsprach. Was uns seit unserem Studium vorgeschwebt war, nämlich durch einen aktiven Zugang zur Mathematik in sinnvollen Zusammenhängen Verständnis für mathematische Strukturen aufzubauen, wollten wir in diesem Projekt verwirklichen. Die Auffassung von Mathematik als „Wissenschaft von Mustern“, wie sie in SAWYER 1964 und WHEELER 1970 für die Elementarmathematik beschrieben war, wurde für uns zu einem durchgehenden Leitmotiv.

In bewusstem Gegensatz zum notorischen Aktionismus in Bildungspolitik, Bildungsadministration und Pädagogik wollten wir Lehrerinnen und Lehrer in ihrer täglichen Praxis mit gut begründeten *einfachen Lösungen* effektiv unterstützen und ihnen ein Bewusstsein für Qualität vermitteln. Der Wahlspruch *simplex sigillum veri* (Das Einfache ist das Siegel der Wahrheit) wurde für das Projekt mit Bedacht gewählt.

Mit dem Projekt wollten wir auch die historisch entstandene Trennung von Kindergarten, Grundschule und den weiterführenden Schulen überwinden, in der wir ein großes Hindernis für langfristig erfolgreiches Mathematiklernen sehen. In den Listen von Grundideen der Arithmetik und der Geometrie, die wir unserer Arbeit zugrunde legten, kommt diese stufenübergreifende Orientierung, die damals ein absolutes Novum war, klar zum Ausdruck. Mathematische Grundideen lassen sich vom Kindergarten aufwärts genetisch entwickeln und ermöglichen Lernbiografien ohne Brüche. Das liegt im Wesen von Grundideen.

Es waren aber nicht nur negative Erfahrungen, die zur Gründung von „mathe 2000“ führten. Mindestens genauso wichtig, war das positive Vorbild IOWO. Mit den Utrechter Kollegen, besonders Adri Treffers, Leen Streefland, Jan de Lange, Ed de Moor und Marja van den Heuvel-Panhuizen, ergab sich in der Folgezeit ein

kritisch-konstruktiver Austausch, der seinen sichtbaren Niederschlag im Programm „mathe 2000“ gefunden hat. Grundlegend für uns waren natürlich auch die Überlegungen von Hans Freudenthal zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht (vgl. FREUDENTHAL 1984). Erwähnt werden müssen in diesem Zusammenhang auch japanische Entwicklungen („lesson studies“ und „open ended approach“), über die mich mein amerikanischer Kollege und Freund Jerry Becker ausführlich informiert hat.

Entwicklungsforschung in der Praxis:

Vom „Handbuch produktiver Rechenübungen“ zum „Zahlenbuch“

Im Mittelpunkt der Mathematikdidaktik aufgefasst als „design science“ stehen die Entwicklung, die empirische Erforschung und die Implementation von Lernumgebungen bzw. Systemen von Lernumgebungen. Aus dem Studium der Geschichte des Mathematikunterrichts hatten wir den Schluss gezogen, dass eine Veränderung des Unterrichts nur über eine Veränderung der Übungspraxis zu erreichen sei. Wir hatten schon in der dritten Auflage unserer Primarstufendidaktik von 1981 ein Kapitel über „Übungsformen“ eingefügt. Die dort beschriebenen Unterrichtsbeispiele passten nahtlos in das Konzept, das Heinrich Winter in seinem Artikel „Begriff und Bedeutung des Übens“ (vgl. 1984) entwickelt hatte. Daher ergab es sich fast von selbst, die Arbeit im Projekt zunächst auf die Abfassung eines zweibändigen „Handbuchs produktiver Übungsformen“ zu konzentrieren, in dem ein lehrplankonformes Konzept vom Rechenunterricht der Grundschule anhand flächendeckender Unterrichtsbeispiele beschrieben werden sollte (vgl. WITTMANN & MÜLLER 1990/92). Der Titel bezog sich auf das „produktive Üben“, das heißt auf das Üben inhaltlicher Lernziele in Verbindung mit den allgemeinen Lernzielen, die Heinrich Winter schon 1975 (!) formuliert hatte (s. S. 41 – 60 in diesem Band). Dafür wurde eine Reihe von Übungsformaten ausgearbeitet (Zahlenmauern, Rechendreiecke, Zauberquadrate, Schöne Päckchen, ...). In beiden Bänden wurde aber auch das grundlegende und das automatisierende Üben („Blitzrechnen“) gebührend berücksichtigt. In welchem Gegensatz zur „Forschungs-Didaktik“ das „Handbuch“ stand und steht, geht aus folgender Episode hervor: 1995 wurde ich zu einer Tagung nach Nashville/USA eingeladen, in der es um „representations“ (Darstellungen) gehen sollte. Das von mir eingereichte Papier (vgl. WITTMANN 1998) fand nicht den Gefallen der Organisatoren und wurde als nicht zum Thema der Tagung passend an den Schluss verbannt. Genauso wenig, wie die anderen Teilnehmer aber mit meinem Papier anfangen konnten, konnte ich mit ihren Papieren anfangen. Es handelte sich um ein beiderseitiges Missverständnis. Am Schluss der Tagung saß ich beim Essen dem Tagungsleiter gegenüber und fragte ihn, warum sich in der amerikanischen Mathematikdidaktik niemand um das Üben kümmern würde. Er schaute mich an, als käme ich von einem anderen Stern, und sagte: „Jeder Forscher, der hierzulande zu erkennen gäbe, dass er sich mit dem Üben befasst, würde wissenschaftlich nicht mehr ernst genommen.“

Beide Bände des „Handbuchs“ verbreiteten sich schnell und regten viele Lehrerinnen und Lehrer in allen Bundesländern und im deutschsprachigen Ausland zu einer Veränderung ihres Unterrichts an. Damit hielten wir unsere Mission zunächst für erfüllt. Mit der Zustimmung zum Konzept verband sich in der Praxis aber immer lauter auch der Wunsch nach einem Unterrichtswerk, in dem das Konzept des „Handbuchs“ für die tägliche Praxis weiter ausgearbeitet und auch auf die Geometrie und das Sachrechnen ausgedehnt werden sollte. Diesem Wunsch konnten wir zunächst nicht nachkommen, da die damals übliche Schulbuchroutine nicht die Freiräume bot, die wir zur Umsetzung unserer Vorstellungen benötigten. Aus diesem Grund hatten wir schon mehrere Angebote von Verlagen, ein Unterrichtswerk herauszugeben, abgelehnt. Dem Wunsch der Praxis nach einem zum „Handbuch produktiver Rechenübungen“ passenden Unterrichtswerk gaben wir schließlich aus zwei Gründen aber doch nach: Erstens kam uns zu Ohren, dass Herausgeber anderer Werke unsere ablehnende Haltung als stillschweigendes Eingeständnis interpretierten, wir seien von der praktischen Umsetzbarkeit unseres Konzepts selbst nicht überzeugt bzw. gar nicht in der Lage es umzusetzen. Zweitens versicherte uns der Leiter der Grundschulabteilung von Klett, Dietrich Eberhardt, glaubhaft, dass er uns völlig freie Hand für ein neuartiges Schulbuch geben würde.

Dass dieses neue Werk, DAS ZAHLENBUCH, über die Landesgrenzen hinaus so erfolgreich sein würde, war zu diesem Zeitpunkt nicht abzusehen. Durch Zufall erfuhren wir Ende 1991, dass „die Konkurrenz“ dem Neuansatz keinerlei Chancen einräumte. Im April dieses Jahres war Wilhelm Oehl verstorben und wir hielten im Dezember ein Gedenkkolloquium für ihn ab. Anwesend waren auch Vertreter des Verlages, für den Oehl tätig gewesen war. In der Nachsitzung kamen wir mit ihnen ins Gespräch. Sie wussten bereits, dass wir an einem Unterrichtswerk auf der Grundlage des Winter-Lehrplans arbeiteten und wünschten uns für diese „mission impossible“, wie man es heute formulieren würde, viel Glück. Eine von ihnen in Auftrag gegebene Marktanalyse hatte nämlich ergeben, dass nur 1–2% der Lehrerschaft bereit seien, den neuen Lehrplan konsequent umzusetzen. „Lehrer sind so. Da kann man nichts machen“, hieß es. Wir allerdings hatten mit Lehrerinnen und Lehrern, mit denen wir viel enger in Kontakt standen als die Herausgeber von Unterrichtswerken, sehr positive Erfahrungen gemacht und ließen uns von dieser Prognose in keiner Weise beirren. In den Jahren 1991 bis 1996 wurde von einem Team unter unserer Leitung ein Band des ZAHLENBUCHs nach dem anderen erarbeitet. Erprobungsfassungen wurden in 40 Klassen in Nordrhein-Westfalen und 20 Klassen in der Schweiz auf Herz und Nieren geprüft und aus den Rückmeldungen wurden für die Endfassungen Schlüsse gezogen. Im Schuljahr 1997/1998 lagen alle Bände vor. Entgegen allen Prognosen war das ZAHLENBUCH von Anfang an ein großer Erfolg, der umso höher zu bewerten ist, als durch das ZAHLENBUCH auch andere Werke veranlasst wurden, sich zu verändern.

Während unserer Arbeit entwickelte sich auch unsere methodologische Basis stetig weiter. Der Artikel „Unterrichtsbeispiele als integrierender Kern der Mathematikdidaktik“ gab die Erfahrungen wieder, die wir 1980/81 bei der Neuauflage unserer Primarstufendidaktik gemacht hatten (vgl. WITTMANN 1982; 1984). Die Fertigstellung des „Handbuchs produktiver Rechenübungen“ 10 Jahre danach gab erneut Anlass zu einer Vergewisserung über unsere Grundlagen. 1992 erschien eine Neufassung von Wittmann 1974 unter dem Titel „Mathematikdidaktik als ‚design science‘“ (vgl. WITTMANN 1992). Die Umstände der Veröffentlichung waren insofern merkwürdig, als das Manuskript aufgrund der vernichtenden Kritik eines Gutachters als normaler Beitrag abgelehnt worden war. Die damaligen Herausgeber des JMD setzten sich aber über dieses Gutachten hinweg und veröffentlichten das Manuskript als Diskussionsbeitrag trotzdem. 1994 wurde die englische Fassung dieses Artikels bei einer internationalen Konferenz in Washington, D.C., bei der es um den wissenschaftlichen Status der Mathematikdidaktik ging, für den einzigen Hauptvortrag ausgewählt (vgl. WITTMANN 1995).

In diesen Artikeln zur Methodologie der „design science“ Mathematikdidaktik wurden die künstlichen Objekte immer noch als „Unterrichtsbeispiele“ bzw. „teaching units“ bezeichnet. Als aber 1997 unser belgischer Kollege Lieven Verschaffel einen Vortrag in unserem Dortmunder Kolloquium hielt und statt „teaching unit“ den Terminus „teaching/learning unit“ benutzte, war blitzartig klar, dass ein neuer Namen gefunden werden musste. Die Entscheidung für „Lernumgebung“ bzw. „learning environment“ fiel noch am gleichen Tag. Um unsere mathematische Interpretation dieses Begriffs zu betonen, präzierte ich in meinem Hauptvortrag auf dem 9th International Congress on Mathematical Education im Jahre 2000 (ICME 9) in Tokyo den Terminus zu „substantial learning environment“ (vgl. WITTMANN 2002).

Strukturgenetische Analysen – die empirische Forschung erster Art

Bei der Neubearbeitung des ZAHLENBUCHs in den Jahren 2010 bis 2012 konnten wir die mathematische Fundierung des Werkes noch steigern und damit das Werk wesentlich verbessern. Die dabei gemachten Erfahrungen veranlassten uns nochmals, über die methodologische Basis des Projekts nachzudenken. Dabei rückte die bei dem Design von Lernumgebungen angewandte *Methode* stärker in den Vordergrund, die wir bis dahin mehr intuitiv benutzt hatten. Als wir Anfang der 1970er-Jahre in die Mathematikdidaktik einstiegen, gab es in diesem Bereich im Wesentlichen nur eine einzige Methode: die didaktische Analyse der Unterrichtsinhalte. Diese sogenannte „Stoffdidaktik“ wurde auf allen Stufen angewandt und bestand darin, zu mathematischen Lerninhalten Lehrstrukturen zu finden und sie in verschiedener Hinsicht zu begründen. Ergebnisse didaktischer Analysen waren Unterrichtsbeispiele und Unterrichtswerke, in denen der Stoff so aufbereitet war, dass die Lernenden Schritt für Schritt dazulernen konnten. Die Nähe zur Mathematik wurde in der Stoffdidaktik bewusst gesucht.

Für Heinz Griesel (vgl. 1974) unterschieden sich didaktische Analysen im Grundsatz nicht von mathematischen Analysen. Trotz der imponierenden Leistungen, die sie aufzuweisen hatte und die auch heute noch größte Bedeutung haben, hatte die Stoffdidaktik einen gravierenden Nachteil: Sie war zu eng mit dem damals vorherrschenden belehrenden Unterricht verbunden. Daher stand sie von dem Augenblick an unter starker Kritik, als mit den Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung unwiderlegbar nachgewiesen wurde, dass die im Unterricht tatsächlich ablaufenden Lernprozesse nicht so gesteuert werden können, wie es in der Didaktik des belehrenden Unterrichts angenommen wurde. Wissen kann nicht einfach vermittelt werden, sondern entwickelt sich im einzelnen Lernenden im sozialen Kontakt mit der Lehrperson und anderen Lernenden auf individuelle Weise (vgl. STEINBRING 2011). Dieser offenkundige Erfolg empirischer Methoden hatte zur Folge, dass sie bei dem Studium von Lernprozessen, sozialen Prozessen und den von den Lernenden jeweils eingebrachten Voraussetzungen, bei der Feststellung der erreichten Ziele, bei der Konstruktion von Lernmodellen (in neuester Zeit „Kompetenzmodellen“) usw. nach und nach die Oberhand gewannen. Heute beherrschen sie das Feld fast ausschließlich. Die didaktische Analyse der Inhalte trat als Forschungsmethode immer mehr in den Hintergrund und wurde schließlich als wissenschaftliche Methode weithin nicht mehr ernst genommen. An den Artikeln, die in den wissenschaftlichen Zeitschriften heute veröffentlicht werden, ist deutlich abzulesen, dass dort das Fach höchstens von sekundärer Bedeutung ist. „Theorien“ über das Lehren und Lernen von Mathematik, die von verschiedensten Disziplinen in die Mathematikdidaktik importiert wurden und werden, haben die Analyse der Inhalte verdrängt. Die Anwendung empirischer Methoden ist ja vielfach auch ohne fachlich fundierte Kenntnisse möglich. Im Vergleich mit der Situation vor 30 Jahren ist die „Forschungs-Didaktik“ heute noch weiter von der Praxis entfernt als damals, die Publikationsflut hat sich vervielfacht, die „Kaste der Experten“ hat sich vergrößert, noch mehr Artikel als früher sind „unlesbar“ und für die Praxis irrelevant.

Die Erfahrungen bei der Entwicklungsforschung im Projekt „mathe 2000“ zeigen, dass es ein fundamentaler Fehler war, aus den Mängeln der Stoffdidaktik alter Prägung den Schluss zu ziehen, fachliche Analysen hätten als Forschungsmethode in der Mathematikdidaktik keine Bedeutung mehr. Das Bild ändert sich nämlich grundlegend, wenn man didaktische Analysen nicht auf den Stoff in seiner fertigen Form reduziert, sondern die Prozesse einbezieht, die bei der Bearbeitung mathematischer Themen in der authentischen mathematischen Praxis ablaufen. Für solche *strukturgenetischen didaktischen Analysen*, wie ich sie nennen möchte, ist die Mathematik nach wie vor von zentraler Bedeutung, aber eben in ihrem Prozesscharakter, wie er bei der aktiven Beschäftigung mit Mathematik – allein oder im Austausch mit anderen – in Erscheinung tritt. Unterschiedliche Lösungsansätze, verschiedene Darstellungsformen, Unklarheiten, Fehler, Irrwege, Missverständnisse usw. treten dabei in natürlicher Weise auf.

Nun ist aber die mathematische Praxis eines Kindergartenkindes eine andere als die eines Kindes, das im zweiten Schuljahr das Einmaleins lernt, die mathematische Praxis eines Mittelstufenschülers, der lernen soll, wie man eine quadratische Gleichung löst, unterscheidet sich von der mathematischen Praxis einer Oberstufenschülerin, die sich mit der Binomialverteilung befasst. Bei strukturgenetischen Analysen muss man sich daher immer *in die Lage der jeweiligen Lerner* versetzen und untersuchen, welche Möglichkeiten sie haben, um innerhalb einer nach bestimmten Gesichtspunkten entworfenen Lernumgebung mathematisch aktiv zu werden. An einem Beispiel soll dies kurz erläutert werden. Im neuen ZAHLENBUCH 3 (WITTMANN & MÜLLER 2013, S. 120/121) wird eine Einführung in die Neunerprobe bei Plusaufgaben gegeben, die das Ergebnis einer strukturgenetischen Analyse ist. Diese Lernumgebung hat folgende Struktur: Die Kinder werden zuerst angeregt, die schriftliche Addition zweier Zahlen an der Stellentafel an Beispielen mit Plättchen nachzuvollziehen. Die Quersumme einer Zahl ergibt sich dabei zwanglos als Anzahl der Plättchen, die man benötigt um die Zahl an der Stellentafel zu legen. Beim Addieren mit Plättchen zeigt sich, dass pro Übertrag 9 Plättchen verschwinden. Daher muss das Ergebnis eine Quersumme haben, die von der Anzahl der für beide Summanden benötigten Plättchen um ein Vielfaches von 9 abweicht. Bei der strukturgenetischen Analyse, die zu dieser Lernumgebung führte, war erstens die Elementarmathematik nach Mustern zu durchforsten, die bei der schriftlichen Addition auftreten. Dann war zu prüfen, ob die Voraussetzungen der Kinder am Ende des 3. Schuljahrs ausreichen, um die intendierte Aufgabenstellung zu verstehen, die angeregten Operationen auszuführen, die zu beobachtenden Muster zu erkennen, zu

beschreiben und mithilfe der Lehrperson zu begründen. Schließlich musste die Lernumgebung auch noch curricular eingeordnet werden, und es musste überprüft werden, welchen Beitrag sie für die Förderung der inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen leisten kann.

Dieses Beispiel zeigt, dass sich die strukturgenetische Analyse an Fakten hält: an die Lernvoraussetzungen der Kinder, an die mathematische Praxis bei der Erforschung von Mustern und an die Zielsetzungen des Unterrichts. *Das alles ist empirisches Material*. Daher ist die strukturgenetische Analyse eine empirische Methode. Sie darf wegen ihrer Ursprünglichkeit mit Recht als empirische Forschung „*erster Art*“ bezeichnet werden. Zu unterstellen, nur die üblichen empirischen Forschungen, die ich als empirische Forschungen „*zweiter Art*“ bezeichne, würden „*empirisch abgesicherte Modelle*“ für das Lehren und Lernen liefern, zeugt von Unkenntnis der wahren Verhältnisse.

Die strukturgenetische Analyse knüpft bewusst an die Stoffdidaktik an. Sie geht aber darüber hinaus, weil sie das Lernen von Mathematik in seiner Genese betrachtet. Diese Methode hat sich in der mathematikdidaktischen Entwicklungsforschung beim Übergang vom belehrenden Unterricht zum aktiv-entdeckenden Lernen in natürlicher Weise ergeben, wobei es hilfreich war, dass bereits in der Stoffdidaktik durchaus auch mathematische Prozesse einbezogen wurden. Am Werk von Heinrich Winter ist dies klar zu erkennen. Sein Buch „*Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*“ ist ein Musterbeispiel für die strukturgenetische didaktische Analyse (vgl. WINTER 1989).

Die Entwicklungsforschung im Projekt „*mathe 2000*“ setzt voll auf die strukturgenetische Analyse. Der Erfolg von „*mathe 2000*“ ist daher gleichzeitig auch ein echter Erfolgsnachweis für diese Forschungsmethode. Gegenüber empirischen Methoden zweiter Art hat die strukturgenetische Analyse mehrere entscheidende Vorteile:

- sie stellt die *mathematische Praxis* als natürlichen Rahmen für das Lehren und Lernen von Mathematik in den Vordergrund und fördert ein aktives Verhältnis zum lebendigen Fach;
- sie ist *konstruktiv* und daher für die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien unentbehrlich;
- ihre Ergebnisse (d.h. mathematisch und didaktisch fundierte Lernumgebungen und begleitende Theorien) sind für einen aktiv-entdeckenden Mathematikunterrichts *handlungsleitend* und gehören daher zum *erst-rangigen Berufswissen von Lehrerinnen und Lehrern*;
- ihre Ergebnisse lassen sich in einer Sprache formulieren, die im Gegensatz zu den „*unlesbaren*“ Artikeln der „*Forschungs-Didaktik*“ *verständlich* ist.

Dieses Plädoyer für strukturgenetische Analysen darf nicht als grundsätzliche Ablehnung empirischer Untersuchungen zweiter Art missverstanden werden. Letztere sind sogar notwendig, wenn neue Gebiete unterrichtet werden sollen, bei denen noch keine Informationen über die Vorkenntnisse vorliegen und neue Darstellungsformen verwendet werden. Natürlich ist es auch sinnvoll mit empirischen Methoden zweiter Art genauer zu untersuchen, welche Prozesse bei unterschiedlichen Inszenierungen einer Lernumgebung im Unterricht ablaufen. Gleichwohl darf nicht übersehen werden, dass strukturgenetische Analysen, die aus der Vertrautheit mit der mathematischen Praxis *auf der jeweiligen Stufe* erwachsen, hierfür aber bereits wesentliche Informationen liefern. Das Design von Lernumgebungen schließt die Empirie in vielen Fällen sogar schon zu einem großen Teil ein, wie aus dem obigen Beispiel ersichtlich ist. Empirische Untersuchungen zweiter Art sind auch umso aufschlussreicher, je enger sie an strukturgenetische Analysen angelagert sind.

Der konstruktive Umgang mit Widerständen: Aufklärung

Die Besonderheit des Entwicklungsforschungsprojekts „*mathe 2000*“ liegt in seiner mathematischen Fundierung und in seinem Praxisbezug. Auf dieser doppelten Verankerung beruhen seine Erfolge. Wegen dieser Besonderheit stieß und stößt das Projekt aber auch auf Widerstände, die sich sowohl aus der Verortung der Mathematikdidaktik im Feld der Bezugsdisziplinen als auch aus einer gewissen Zurückhaltung der Praxis gegenüber theoretischen Vertiefungen ergeben. Diese Widerstände haben uns einerseits die Arbeit erschwert, andererseits aber auch herausgefordert, unsere Position weiter auszuarbeiten und besser zu vertreten. Dies soll in diesem Abschnitt erläutert werden, in dem es über das Projekt hinaus um das Selbstverständnis der Fachdidaktik geht.

Das Verhältnis zu den Bezugsdisziplinen klären

Wenn man auf die Notwendigkeit hinweist, die Mathematikdidaktik primär auf das Fach zu beziehen, muss man mit dem Vorurteil rechnen, es komme beim Lernen von Mathematik sowieso „nur“ auf „die Mathematik“ an und eine eigene Disziplin Mathematikdidaktik sei eigentlich überflüssig. Dieses Vorurteil ist unter Mathematikern leider weit verbreitet. Gerne wird hier aus Goethes Faust zitiert: „Es trägt Verstand und rechter Sinn mit wenig Kunst sich selber vor.“ Wie oft haben wir uns das anhören müssen? Mathematiker, die über den Tellerrand ihres Spezialgebiets hinausschauen, wissen es besser. Sie sehen die Mathematik in ihrer historischen und psychologischen Entwicklung und wissen, dass man, um Mathematik erfolgreich unterrichten zu können, die mathematische Praxis auf der jeweiligen Stufe gründlich kennen muss. Diese jeweils spezifische Praxis ergibt sich offensichtlich nicht aus der mathematischen Praxis der mathematischen Spezialisten. Wenn das so wäre, müsste man aus den mathematischen Zeitschriften deduzieren können, wie man im Kindergarten, in der Grundschule usw. bis hinauf ins Gymnasium Mathematik zu unterrichten hat. Das ist nicht möglich. Mathematikdidaktik ist eine eigene Disziplin mit einem eigenen wissenschaftlichen Anspruch. Das müssen Mathematiker verstehen, und aus dieser Einsicht muss eine aktive Unterstützung der mathematisch fundierten Mathematikdidaktik erwachsen.

Eine Schwierigkeit anderer Art besteht im Verhältnis zu anderen Bezugsdisziplinen. Psychologen, Erziehungswissenschaftler und Bildungsforscher, die mit empirischen Methoden (zweiter Art) arbeiten, lassen nur die Teile der Mathematikdidaktik als „wissenschaftlich“ gelten, in denen mit ihren Methoden gearbeitet wird. Es ist so der paradoxe Zustand eingetreten, dass die fach- und praxisferne Richtung der Mathematikdidaktik, deren Beitrag zur Unterrichtsentwicklung marginal ist, als „wissenschaftlich“ anerkannt und von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert wird, derjenigen Richtung dagegen, welche die Unterrichtsentwicklung nach wie vor trägt, der Status „wissenschaftlich“ abgesprochen und der Zugang zur Forschungsförderung verwehrt wird. Diese Einschätzung gilt keineswegs nur für die Mathematikdidaktik, sondern für die didaktische Entwicklungsforschung generell (vgl. KAHLERT 2007; 2011). Das allgemeine Klima in den Wissenschaften wirkt sich hier unheilvoll aus. Namentlich in den Kultur- und Sozialwissenschaften gelten Distanziertheit, Abstraktion, theoretische Begrifflichkeit und die gehäufte Verwendung von Fremdwörtern als Ausdruck von Wissenschaftlichkeit. Dieser Stil war in diesen Wissenschaften schon immer problematisch genug, wie der ironisch gemeinte lateinische Spruch *omne ignotum pro magnifico* beweist (zu Deutsch: „Alles was unverständlich ist, gilt als großartig“). Auch in dieser Hinsicht gilt es Aufklärungsarbeit zu leisten. Ziel muss die Öffnung der Forschungsförderung für die strukturgenetische didaktische Analyse sein. Der momentane Zustand ist unhaltbar.

Die sinnngemäße Umsetzung der Konzeption in der Praxis unterstützen

Hier erweisen sich die Forderungen nach „Kindorientierung“, „Anwendungsorientierung“ und „Kompetenzorientierung“ als kritisch.

Kindergarten und Grundschule sind traditionell auf „das Kind“ und auf „Lebensnähe“ eingestellt. Es ist daher nicht leicht die Einsicht zu vermitteln, dass aus dem Fach wesentliche Impulse für gutes und erfolgreiches Lernen geschöpft werden können, auch und besonders für die schwächeren Kinder (s. dazu den Beitrag von Michael Gaidoschik in diesem Band, S. 144 – 149). Mathematisch fundierte Lernangebote stehen aber selbst dann bzw. besonders dann in der Gefahr einseitig verstanden und eingesetzt zu werden, wenn sie als „kindgemäß“ wahrgenommen werden. Dies sei am Beispiel des „Ich-du-wir“-Prinzips von Peter Gallin und Urs Ruf verdeutlicht. In einem verengten Verständnis von „Kindorientierung“ kann dieses Prinzip leicht in der Weise missverstanden werden, dass die Kinder die Möglichkeit erhalten sollen, ohne fachliche Vorinformationen zuerst ganz alleine für sich Lösungen zu den jeweils gestellten Problemen zu finden („Ich mache es so“), dass dann diese Lösungen mit denen von anderen Kindern verglichen werden sollen („Wie machst du es?“) und dass schließlich auf dieser Grundlage eine Verständigung über sinnvolle Lösungen herbeigeführt werden soll („Das machen wir ab.“). Wie in dem Beitrag von Christoph Selter und Beate Sundermann (S. 201 – 208 in diesem Band) deutlich wird, hat dieses Prinzip aber nur innerhalb einer fachlichen Rahmung Sinn. In der Regel muss bereits vor der individuellen Beschäftigung mit einer Aufgabe eine Verständigung über Sprechweisen, Ausdrucksmittel und Ziele stattgefunden haben, wenn die individuelle Auseinandersetzung mit dem Problem effektiv sein soll. In der dritten Phase ist

eine Verständigung über fachlich sinnvolle Lösungen ohne die regulierenden Strukturen des Faches, die von der Lehrperson eingebracht werden müssen, unmöglich, wenn die Verständigung nicht in Beliebigkeit enden soll. Heute wird die Forderung nach „Individualisierung“ so lautstark erhoben, dass sich Lehrpersonen kaum des Eindrucks erwehren können, sie dürften in individuelle Lernprozesse nicht mehr eingreifen, sondern sie nur noch begleiten. Das ist ein großes Missverständnis des „Ich-du-wir-Prinzips“. John Dewey hat sich zu dieser Problematik nicht nur in dem Artikel „Das Kind und die Fachinhalte“ geäußert, der diesen Band eröffnet (S. 12 – 21), sondern noch deutlicher in dem zwanzig Jahre später veröffentlichten Artikel „Individualität und Erfahrung“. Dort stellt er fest (DEWEY 1984, S. 55 – 56, Übers. E. Ch. W.):

Die Befürworter individueller Lernprozesse argumentieren oft folgendermaßen: Gebt den Kindern gewisse Materialien, Werkzeuge, Hilfsmittel und lasst sie damit nach ihren ganz individuellen Wünschen umgehen und sich frei entwickeln. Setzt den Kindern keine Ziele, gebt ihnen keine Verfahren vor. Sagt ihnen nicht, was sie tun sollen. All dies wäre ein ungerechtfertigter Eingriff in ihre heilige Individualität, denn das Wesen der Individualität ist es gerade sich selbst die Zwecke und die Ziele zu setzen.

Ein solcher Standpunkt ist töricht. Denn wenn man ihn einnimmt, versucht man etwas Unmögliches, was immer töricht ist, und man missversteht die Bedingungen für selbstständiges Denken. Es gibt viele Möglichkeiten offene Angebote wahrzunehmen und irgendetwas damit zu machen, und es ist so gut wie sicher, dass diese eigenen Versuche ohne Anleitung erfahrener Erzieher und Lehrer zufällig, sporadisch und ineffektiv sein werden.

Niemand würde bezweifeln, dass die persönliche Entwicklung in irgendeinem Lebensbereich durch die Nutzung der von anderen gesammelten Erfahrungen gefördert wird. Niemand würde z.B. ernsthaft vorschlagen, die Ausbildung von Schreinerlehrlingen solle beim Nullpunkt beginnen, d.h. ohne dass dem Lehrling Wissen über Mechanik, den Gebrauch von Werkzeugen, die Kenntnis von Materialien usw. vermittelt wird. Niemand käme auch auf die Idee, dass ein Schreinermeister, wenn er seinem Lehrling dieses Wissen vermittelt, den persönlichen Stil des Lehrlings einengen und seine individuelle Entwicklung behindern würde. Ein Erzieher und ein Lehrer haben dasselbe Recht und die dieselbe Pflicht die Kinder anzuleiten wie ein Handwerksmeister seine Lehrlinge.

Die mathematische Fundierung von „mathe 2000“ bedeutet auch eine Relativierung der heute nachdrücklich erhobenen Forderung nach „Anwendungsorientierung“. Um den Unterricht mit Sinn zu erfüllen und die Lernenden zu motivieren, wird in vielen didaktischen Konzepten zum Mathematikunterricht nicht nur in der Grundschule einseitig auf „Realitätsbezug“, „Lebensnähe“ und „praktisches Lernen“ gesetzt. Das ist kontraproduktiv. Wie in dem Beitrag von Gerhard Müller in diesem Band gezeigt wird (S. 80 – 91), darf gerade um der Anwendungen willen der „reine“ Aspekt der Mathematik nicht zu kurz kommen. Die Anwendungsorientierung muss Hand in Hand mit der Strukturorientierung gehen, wie es wie im Winter-Lehrplan gefordert wird. Die mathematische Fundierung des Projekts „mathe 2000“ ist daher kein unnötiger Luxus. Sie bedeutet keine Abkehr von den Anwendungen, sondern ermöglicht im Gegenteil einen besseren Zugang als die Fixierung auf unmittelbare Anwendungen.

Das Projekt „mathe 2000“ steht für eine „Kompetenzorientierung“ im Sinne der allgemeinen Lernziele von Heinrich Winter (S. 41 – 60). Die Bildungspolitik zwingt den Schulen momentan im Schulterschluss mit der Bildungsforschung aber eine andere Art von „Kompetenzorientierung“ auf, die durch psychometrische Kompetenzmodelle und zentrale Vergleichstests (VERA & Co.) gekennzeichnet ist. Der Lehrerschaft und der Öffentlichkeit deutlich zu machen, dass mit diesem inhaltsleeren Ansatz die mathematische Bildung nicht gefördert, sondern auf Dauer unterminiert wird, erfordert angesichts des Drucks, der von der Bildungsadministration ausgeübt wird, große Anstrengungen. Gleichwohl stehen die Chancen nicht schlecht, die im Projekt „mathe 2000“ praktizierte, systemische Qualitätssicherung als bessere Alternative zu vermitteln. Diese Aufgabe wird umso leichter, je mehr die gravierenden Nachteile des Bildungsmonitorings erkannt werden, wofür es erste deutliche Anzeichen gibt.

Um Verständnis für die theoretische Fundierung des Konzepts werben

Was die Akzeptanz von „mathe 2000“ in der Breite betrifft, ist ein anderer Punkt kritisch: Die Einarbeitung in das Konzept ist naturgemäß mit einem bestimmten Aufwand verbunden. Insbesondere ist es unumgänglich, dass sich Lehrerinnen und Lehrer auch auf „theoretische“ Fragen einlassen und nicht nur methodische Arrangements (Methodentraining, Stationenlernen, Lerntagebücher, ...) als wichtig für den Unterricht ansehen. Die Praxis hat zwar gute Gründe die Theoriegebäude der „Forschungs-Didaktik“ als praxisfern zurückzuweisen, aber diese verständliche Abwehr darf im wohlverstandenen Interesse der Praxis nicht auf theoretische Überlegungen generell übertragen werden. In keiner „design science“ kann die Praxis allein aus der Praxis heraus entwickelt werden, auch nicht in der Mathematikdidaktik. Das Projekt „mathe 2000“ ist ohne seinen theoretischen Unterbau nicht denkbar. Dem Universalgenie Leonardo da Vinci, dem Ingenieur Ernst Abbe und dem theoretischen Physiker Ludwig Boltzmann wird der Grundsatz zugeschrieben: „Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie“. Diese Erkenntnis gilt auch für das professionelle Handeln in der Schule. Für das Lehren und Lernen von Mathematik kommt dabei der mathematischen Fundierung die größte Bedeutung zu, sowohl was die Arbeitsökonomie als auch was den Lernerfolg angeht. Wenn diese Fundierung fehlt, verliert der Unterricht sein Ziel, wie John Dewey im einführenden Beitrag „Das Kind und die Fachinhalte“ überzeugend ausgeführt hat (S. 12 – 21).

Manche Lehrerinnen und Lehrer scheuen den Aufwand, der mit einer Einarbeitung in das mathematisch fundierte Konzept von „mathe 2000“ verbunden ist und glauben, mit „mathematikfreien“ Konzepten besser zu fahren. Leider unterstützen die Verlage diese Position, indem sie Unterrichtswerke anbieten, mit denen die Anforderungen der heutigen Lehrpläne sogar unterlaufen werden können.

Um ein Umdenken anzuregen ist es hilfreich einzusehen, dass es sich hier um eine Problematik handelt, die auch in anderen Bereichen zu finden ist. Dem englischen Schriftsteller und Sozialreformer John Ruskin (1819–1900) wird folgendes „Gesetz der Wirtschaft“ zugeschrieben:

Es gibt kaum ein gutes Produkt auf dieser Welt, das nicht irgendjemand schlechter herstellen und billiger verkaufen könnte, und die Menschen, die sich nur am Preis orientieren, werden die gerechte Beute solcher Machenschaften. Wenn Sie für ein gutes Produkt etwas zu viel bezahlen, verlieren Sie etwas Geld. Das ist alles. Aber die Ware ist gut. Viel mehr Geld verlieren Sie, wenn Sie ein billigeres Produkt kaufen, das die ihm zugedachte Aufgabe nicht erfüllt. Das Gesetz der Wirtschaft verbietet es, für wenig Geld viel Wert zu erhalten.

Dieses Gesetz lässt sich auf die Überlegungen bei der Entscheidung für Unterrichtsmaterialien übertragen. Man muss nur an die Stelle der „Kosten für eine Ware“ den Aufwand einsetzen, den man für den Einsatz eines Materials investieren muss, und für die „Ware“ die Leistung, die das Material im Lehren und Lernen erbringt. Die Aussage lautet dann:

Es gibt kein gutes didaktisches Konzept, das nicht irgend jemand in seinem Anspruch reduzieren und mit geringeren Anforderungen „verkaufen“ könnte, und Lehrerinnen und Lehrer, die ein Konzept nur nach der aufzuwendenden Mühe für die Einarbeitung beurteilen, werden die gerechte Beute solcher Machenschaften. Eine etwas höhere Investition für ein gutes Konzept bringt mehr als ein reduzierter Aufwand bei didaktischen „Billiglösungen“. Das Gesetz der Didaktik verbietet es, für wenig Einsatz viel Ertrag zu erhalten.

Dass die „mathe 2000“-Materialien ein besonders gutes didaktisches Verhältnis Aufwand/Leistung aufweisen, wissen inzwischen immer mehr Lehrerinnen und Lehrer zu schätzen, vor allem auch „fachfremd“ unterrichtende. Mit dem neuen ZAHLENBUCH (WITTMANN & MÜLLER 2012/2013) wurde hier noch einmal ein signifikanter Fortschritt erzielt.

Ausblick

Unsere Erfahrungen bei der Projektarbeit bestärken uns darin, unsere Entwicklungsforschung in der gleichen Weise wie in den vergangenen 25 Jahren fortzusetzen. Nach Abschluss der Arbeit am ZAHLENBUCH stehen als nächstes zwei Aufgaben an:

1. Auf der Grundlage des ZAHLENBUCH-Frühförderprogramms (2010 mit dem Worlddidac Award ausgezeichnet) möchten wir die Zusammenarbeit von Grundschule und Kindergarten fördern und darauf hinwirken, dass die Grundschulen in ihrem eigenen Interesse den Kindergärten hierfür Ressourcen zur Verfügung stellen (Fortbildung, Materialbeschaffung).
2. Wir möchten das „Handbuch produktiver Rechenübungen“ neu bearbeiten und dabei wieder die Kooperation mit der Praxis suchen. John Dewey hat bei seinen Überlegungen zu einer Unterrichtswissenschaft den Vorschlag gemacht, Lehrerinnen und Lehrer explizit in die Entwicklungsforschung einzubeziehen (vgl. DEWEY 1988, S. 23–24, Abschnitt „The teacher als investigator“). Hier möchten wir neue Wege beschreiten. Die Erfahrungen in anderen „design sciences“ bieten hierzu wertvolle Anregungen (vgl. SCHÖN 1983).

Mit diesen beiden Vorhaben hoffen wir einen weiteren Beitrag zu einer wissenschaftlich fundierten und gleichzeitig praxisbezogenen Mathematikdidaktik leisten zu können. Der damit verbundene Austausch mit engagierten Menschen, die in der Praxis der Grundschule und des Kindergartens und in der didaktischen Entwicklungsforschung ihre Arbeit mit möglichst sparsamen Mitteln möglichst gut machen wollen, hat uns in der Vergangenheit gestärkt und beflügelt. Ihnen fühlen wir uns verbunden und verpflichtet. Wir freuen uns auf die weitere Zusammenarbeit.

Literatur

- BETH, E. W. & PIAGET, J.: *Épistémologie mathématique et psychologie*. Paris: PUF 1961.
- DEWEY, J.: *Individuality and Experience. The Later Works, vol. 2: 1925–1927*. Carbondale, Ill: SIU Press 1984, S. 55–61.
- DEWEY, J.: *The sources of a science of education. The Later Works. Vol. 5: 1929–1930*. Carbondale, Ill: SIU Press 1988, S. 1–14.
- FREUDENTHAL, H.: *Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?* In: *Der Mathematikunterricht*, 9 (1963), H. 4, S. 5–19.
- FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe. 2 Bände*. Stuttgart: Klett 1973.
- FREUDENTHAL, H.: *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München: Oldenburg 1984.
- GRIESEL, H.: *Überlegungen zur Didaktik der Mathematik als Wissenschaft*. In: *ZDM*, 6 (1974), S. 115–119.
- KAHLERT, J.: *Was kommt nach der Erkenntnis? Zum schwierigen Verhältnis pädagogischer Disziplinen zu der Erwartung, sich nützlich zu machen*. In: G. REINMANN & J. KAHLERT: *Der Nutzen wird vertagt ... Bildungswissenschaften im Spannungsfeld zwischen wissenschaftlicher Profilbildung und praktischem Mehrwert*. Lengerich: Pabst Scientific Publishers 2007, S. 20–45.
- KAHLERT, J. & ZIERER, K.: *Didaktische Entwicklungsforschung aus Sicht der pragmatischen Entwicklungsarbeit*. In: W. Einsiedler (Hg.): *Unterrichtsentwicklung und didaktische Entwicklungsforschung*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt 2011, S. 71–87.
- MAAK, W.: *Differential- und Integralrechnung*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1960.
- MÜLLER, G. N. & WITTMANN, E. CH.: *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. 3. Aufl.*, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1981.
- OEHL, W.: *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Hannover: Schroedel 1962.
- OEHL, W.: *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*. Hannover: Schroedel 1967.
- POLYA, G.: *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Tübingen: Francke Verlag 1949 (Sammlung Dalp).
- POLYA, G.: *Mathematik und plausibles Schließen. 2 Bände*. Basel/Stuttgart: Birkhäuser 1962, 1963a.
- POLYA, G.: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. 2 Bände*. Basel: Birkhäuser 1963b/1966.
- PIAGET, J.: *Die Entwicklung des Erkennens I: Das mathematische Denken*. Stuttgart: Klett 1972.
- PIAGET, J.: *Psychologie der Intelligenz*. Zürich: Rascher 1947.

- PIAGET, J. & SZEMINSKA, A.: *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind*. Stuttgart: Klett 1972.
- PIAGET, J. & INHELDER, B.: *Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kind*. Stuttgart: Klett 1971.
- SAWYER, W. W.: *Vision in Elementary Mathematics*. London: Penguin Books 1964.
- SCHMIDT, S.: *Die Rechendidaktik von Johannes Kühnel (1869 – 1928) – Wissenschaftsverständnis, deskriptive und normative Grundlagen sowie deren Vorschläge für die Gestaltung des elementaren Unterrichts*. Diss. Köln 1978.
- SCHÖN, D.: *The Reflective Practitioner*. New York: Basic Books 1983.
- SELTNER, CH. & WALTHER, G. (Hg.): *Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand*. Leipzig/Stuttgart/Düsseldorf: Klett 2001.
- SIMON, H. A.: *The Sciences of the Artificial*. Cambridge, Ma.: MIT-Press 1970.
- SPIVAK, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 5. Berkeley: Perish and Publish Press 1979.
- STEINBRING, H.: *Changed Views on Mathematical Knowledge in the Course of Didactical Theory Development: Independent Corpus of Scientific Knowledge or Result of Social Constructions?* In: T. ROWLAND & K. RUTHVEN (Eds.): *Mathematical Knowledge in Teaching*, Mathematics Education Library, vol. 50. Berlin und New York: Springer 2011, chap. 4, S. 43 – 64.
- VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra I*. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1960.
- WHEELER, D. (Hg.): *Modelle für den Mathematikunterricht in der Grundschule*. Stuttgart: Klett 1970.
- WINTER, H.: *Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?* In: ZDM, 7 (1975), S. 106 – 116.
- WINTER, H.: *Begriff und Bedeutung des Übens*. In: *mathematik lehren*, 2/1984, S. 4 – 11.
- WINTER, H.: *Neunerregel und Abakus – schieben, denken, rechnen*. In: *mathematik lehren*, 11/1985, S. 22 – 26.
- WINTER, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1989.
- WITTMANN, E. CH.: *Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft*. In: ZDM, 6 (1974), S. 119 – 121.
- WITTMANN, E. CH.: *Unterrichtsbeispiele als integrierender Kern der Mathematikdidaktik*. In: JMD, 3 (1982), S. 1 – 18.
- WITTMANN, E. CH.: *Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education*. In: ESM, 15 (1984), S. 25 – 36.
- WITTMANN, E. CH.: *Mathematikdidaktik als „design science“*. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 13 (1992), S. 55 – 70.
- WITTMANN, E. CH.: *Mathematics Education as a 'Design Science'*. In: *Educational Studies in Mathematics*, 29 (1995), S. 355 – 374.
- WITTMANN, E. CH.: *Standard Number Representations in Teaching Arithmetic*. In: JMD, 19 (1998), H. 2/3, S. 149 – 178.
- WITTMANN, E. CH.: *Developing Mathematics Education in a Systemic Process. Plenary Lecture at ICME 9*. In: ESM, 48 (2002), S. 1 – 20.
- WITTMANN, E. CH. & MÜLLER, G.N.: *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Band 2: Von halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart: Klett 1990/92.
- WITTMANN E. CH. & MÜLLER, G. N.: *Das Zahlenbuch, Bände 1 – 4*. Stuttgart: Klett 2012/2013.